**19.**

$$I = \int e^{\sqrt{x}} dx$$

Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{x} = t$ pentru care $dx = 2tdt$. Se obţine

$$I = \int 2te^t dt = 2\int t\left(e^t\right)' dt = 2\left(te^t - \int e^t dt\right) = 2\left(te^t - e^t\right)$$

Revenim la sustituţia iniţială şi avem

$$I = \int e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + \mathcal{C}.$$

---

**20.**

$$I = \int e^{\arcsin x} dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $\arcsin x = t$ pentru care $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt$. Aici $x = \sin t$, deci $\sqrt{1-x^2} = \cos t$.

Se obţine

$$I = \int e^t \cos t dt,$$

unde se face integrarea prin părţi.

[...]

La final se obţine

$$I = \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{2} \cdot e^{\arcsin x} + \mathcal{C}.$$

---

**29.**

Avem funcţia

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & x \geq 0 \\ \frac{x}{x-1}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \\ 1 + \frac{1}{x-1}, & x < 0 \end{cases}$$

Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $f$. Atunci

$$F(x) = \begin{cases} x - \ln(1+x) + \mathcal{C}_1, & x > 0 \\ x + \ln(1-x) + \mathcal{C}_2, & x < 0 \end{cases}$$

Constantele $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ sunt astfel alese încât funcţia $F$ să fie continuă. Avem limitele laterale

$$l_d(0) = \mathcal{C}_1$$
$$l_s(0) = \mathcal{C}_2,$$

deci $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$. Atunci, primitiva funcţiei $f$ este

$$F(x) = \begin{cases} x - \ln(1+x) + \mathcal{C}, & x \geq 0 \\ x + \ln(1-x) + \mathcal{C}, & x < 0 \end{cases}$$

---

**17**

$$I = \int \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$$

Vom folosi formula integrării prin părţi

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(e^{\arctan x}\right)' dx \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\arctan x} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \cdot e^{\arctan x} dx \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\arctan x} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\arctan x} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(e^{\arctan x}\right)' dx \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\arctan x} - \left[ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\arctan x} - \left( \int \frac{-1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \right) \cdot e^{\arctan x} dx \right] \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\arctan x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\arctan x} - I
\end{aligned}
$$

Rezultă

$$I = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\arctan x} + \mathcal{C}.$$

---

**Ex. 3 problema 9.**

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} dx$$

Prima integrală

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{2} e^x dx = \frac{1}{2} e^x \Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

A doua integrală

Pentru început avem

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{1+x-1} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

Atunci

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}+1}$$

Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{1+x} = t$ pentru care $x = t^2 - 1$, iar $dx = 2tdt$.

Pentru $x = 0$ rezultă $t = 1$.

Pentru $x = 1$ rezultă $t = \sqrt{2}$.

Se obţine

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2tdt}{t+1} = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

[...]

---

**Ex. 3 problema 9.**